El álgebra y la geometría de las ecuaciones diferenciales parciales no lineales

Alexander Quintero Vélez

Seminar of the PhD in Mathematical Engineering
Universidad EAFIT

Contenido

Ejemplo prototípico: La ecuación de Korteweg-de Vries

La expresión matemática de la ecuación de Korteweg-de Vries es

La expresión matemática de la ecuación de Korteweg-de Vries es

$$\boxed{4u_t - 6uu_x - u_{xxx} = 0}$$

La expresión matemática de la ecuación de Korteweg-de Vries es

$$\boxed{4u_t - 6uu_x - u_{xxx} = 0}$$

donde

x coordenada espacial

t coordenada temporal

$u = u(x,t)$ función real

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t},\ u_x = \frac{\partial u}{\partial x},\ u_{xxx} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

Leyes de conservación

Definición

Una *ley de conservación* para una ecuación de evolución

$$u_t = f(u, u_x, u_{xx}, \dots)$$

es una relación de la forma

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial x} = 0$$

donde

$$\begin{aligned} T &= T(u, u_x, u_{xx}, \dots) \quad \text{“densidad”} \\ X &= X(u, u_x, u_{xx}, \dots) \quad \text{“flujo”} \end{aligned}$$

Observación

Observación

Si $X \to 0$ cuando $|x| \to \infty$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{-\infty}^{\infty} T \,\mathrm{d}x\right) = 0 \qquad \text{o} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} T \,\mathrm{d}x = \text{const.}$$

Tres leyes de conservación para la ecuación de Korteweg-de Vries son:

Tres leyes de conservación para la ecuación de Korteweg-de Vries son:

$$\boxed{\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial t}(4u) + \frac{\partial}{\partial x}(-3u^2 - u_{xx}) = 0 \\
\frac{\partial}{\partial t}(4u^2) + \frac{\partial}{\partial x}\left(-4u^3 - 2uu_x + u_x^2\right) = 0 \\
\frac{\partial}{\partial t}\left(8u^3 - 4u_x^2\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(-9u^4 - 6u^2 u_{xx} - 12uu_x^2 + 2u_x u_{xx} - u_{xx}^2\right) = 0
\end{gathered}}$$

Comentario

Comentario

Mediante el reemplazo $u = \phi_x$, la ecuación de Korteweg-de Vries se obtiene a partir de un principio variacional con densidad Lagrangiana:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\phi_x\phi_t - \frac{1}{4}\phi_x^3 + \frac{1}{8}\phi_{xx}^2$$

Comentario

Mediante el reemplazo $u = \phi_x$, la ecuación de Korteweg-de Vries se obtiene a partir de un principio variacional con densidad Lagrangiana:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\phi_x\phi_t - \frac{1}{4}\phi_x^3 + \frac{1}{8}\phi_{xx}^2$$

Las tres leyes de conservación anteriores corresponden a una aplicación directa del teorema de Noether:

$$\begin{aligned} \phi \to \phi + c \quad &\Longrightarrow \quad \text{conservación de la masa} \\ x \to x + c \quad &\Longrightarrow \quad \text{conservación del momentum} \\ t \to t + c \quad &\Longrightarrow \quad \text{conservación de la energía} \end{aligned}$$

Acotación esencial

La ecuación de Korteweg-de Vries posee un número infinito de leyes de conservación.

La representación de Lax

La representación de Lax

En 1968, Peter Lax observó que la ecuación de Korteweg-de Vries se puede escribir en la forma:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [P, L]$$

La representación de Lax

En 1968, Peter Lax observó que la ecuación de Korteweg-de Vries se puede escribir en la forma:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [P, L]$$

donde

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u$$

$$P = \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{3}{2} u \frac{\partial}{\partial x} + \frac{3}{4} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$[P, L] =$ conmutador en el álgebra de operadores diferenciales

Preliminares algebraicos

Operadores diferenciales

Definición

Sea $A = \mathbb{C}[\![x, t]\!]$ el álgebra de series de potencias y sea $\partial = \partial/\partial x$. El *álgebra de operadores diferenciales* $A[\partial]$ consiste de todas las expresiones de la forma

$$\sum_{i=0}^{m} a_i \partial^i \qquad (a_i \in A)$$

La regla para multiplicar elementos de $A[\partial]$ está dada por

$$\partial a = a\partial + \partial(a)$$

Operadores pseudo-diferenciales

Operadores pseudo-diferenciales

Definición

El *álgebra de operadores pseudo-diferenciales* $A((\partial^{-1}))$ consiste de todas las expresiones de la forma

$$\sum_{i=-\infty}^{m} a_i \partial^i \qquad (a_i \in A)$$

La regla para multiplicar elementos de $A((\partial^{-1}))$ está dada por

$$\partial^{-1} a = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \partial^i (a) \partial^{-1-i}$$

Si $a_m \neq 0$ entonces m es llamado el *orden* de P.

Nota

Nota

Simbólicamente, la relación anterior se puede justificar como sigue:

Nota

Simbólicamente, la relación anterior se puede justificar como sigue:

$$
\begin{aligned}
&\partial^{-1}(ab)\\
&\equiv \int ab\,\mathrm{d}x\\
&= a\int b\,\mathrm{d}x - \int \partial(a)\left(\int b\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x\\
&= a\int b\,\mathrm{d}x - \partial(a)\int\left(\int b\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x + \int \partial^2(a)\left(\int\left(\int b\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x\\
&\ldots\\
&= a\int b\,\mathrm{d}x - \partial(a)\int\left(\int b\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x + \partial^2 a\int\left(\int\left(\int b\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x - \cdots\\
&\equiv a\partial^{-1}(b) - \partial(a)\partial^{-2}(b) + \partial^2(a)\partial^{-3}(b) - \cdots
\end{aligned}
$$

Si $P = \sum_{i=-\infty}^{m} a_i \partial^i, Q = \sum_{j=-\infty}^{n} b_j \partial^j \in A(\!(\partial^{-1})\!)$ entonces:

Si $P = \sum_{i=-\infty}^{m} a_i \partial^i, Q = \sum_{j=-\infty}^{n} b_j \partial^j \in A(\!(\partial^{-1})\!)$ entonces:

$$PQ = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k-i} \binom{m-i}{k-i-j} a_{m-j} \partial^{k-i-j} (b_{n-j}) \right] \partial^{m+n-k}$$

$$[P, Q] = PQ - QP$$

Si $P = \sum_{i=-\infty}^{m} a_i \partial^i, Q = \sum_{j=-\infty}^{n} b_j \partial^j \in A(\!(\partial^{-1})\!)$ entonces:

$$PQ = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k-i} \binom{m-i}{k-i-j} a_{m-j} \partial^{k-i-j}(b_{n-j}) \right] \partial^{m+n-k}$$

$$[P, Q] = PQ - QP$$

Notación: Si $P = \sum_{i=-\infty}^{m} a_i \partial^i \in A(\!(\partial^{-1})\!)$

$$P_+ = \sum_{i=0}^{m} a_i \partial^i$$

$$P_- = \sum_{i<0} a_i \partial^i$$

Raices

Raices

Proposición

Sea L un operador diferencial de orden n de la forma

$$L = \partial^n + u_{n-2}\partial^{n-2} + \cdots + u_1\partial + u_0$$

Entonces, en el álgebra $A(\!(\partial^{-1})\!)$*, L posee una única raiz n-ésima de la forma*

$$L^{1/n} = Q = \partial + \sum_{i=1}^{\infty} q_i\partial^{-i}$$

donde los coeficientes q_i *son ciertos polinomios diferenciales de coeficientes constantes en los* u_i*.*

Raices

Proposición

Sea L un operador diferencial de orden n de la forma

$$L = \partial^n + u_{n-2}\partial^{n-2} + \cdots + u_1\partial + u_0$$

Entonces, en el álgebra $A(\!(\partial^{-1})\!)$, L posee una única raiz n-ésima de la forma

$$L^{1/n} = Q = \partial + \sum_{i=1}^{\infty} q_i \partial^{-i}$$

donde los coeficientes q_i son ciertos polinomios diferenciales de coeficientes constantes en los u_i.

Notación: Para cualquier $r \in \mathbb{N}$

$$L^{r/n} = (L^{1/n})^r$$

Ejemplo

Ejemplo

Examinemos el caso $n = 2$:

Ejemplo

Examinemos el caso $n = 2$:

$$L = \partial^2 + u$$

Ejemplo

Examinemos el caso $n = 2$:

$$L = \partial^2 + u$$

Debemos hallar Q tal que $Q^2 = L$.

Ejemplo

Examinemos el caso $n = 2$:

$$L = \partial^2 + u$$

Debemos hallar Q tal que $Q^2 = L$. Calculando:

$$Q^2 = \partial^2 + 2q_1 + (2q_2 + \partial(q_1))\partial^{-1} + (2q_3 + \partial(q_2) + q_1^2)\partial^{-2} + \cdots$$

Ejemplo

Examinemos el caso $n = 2$:

$$L = \partial^2 + u$$

Debemos hallar Q tal que $Q^2 = L$. Calculando:

$$Q^2 = \partial^2 + 2q_1 + (2q_2 + \partial(q_1))\partial^{-1} + (2q_3 + \partial(q_2) + q_1^2)\partial^{-2} + \cdots$$

Luego:

$$q_1 = \frac{1}{2}u, \quad q_2 = -\frac{1}{4}u_x, \quad q_3 = \frac{1}{8}(u_{xx} - u^2), \quad \ldots$$

Ejemplo

Examinemos el caso $n = 2$:

$$L = \partial^2 + u$$

Debemos hallar Q tal que $Q^2 = L$. Calculando:

$$Q^2 = \partial^2 + 2q_1 + (2q_2 + \partial(q_1))\partial^{-1} + (2q_3 + \partial(q_2) + q_1^2)\partial^{-2} + \cdots$$

Luego:

$$q_1 = \frac{1}{2}u, \quad q_2 = -\frac{1}{4}u_x, \quad q_3 = \frac{1}{8}(u_{xx} - u^2), \quad \ldots$$

Así:

$$Q = \partial + \frac{1}{2}u\partial^{-1} - \frac{1}{4}u_x\partial^{-2} + \frac{1}{8}(u_{xx} - u^2)\partial^{-3} - \cdots$$

La jerarquía generalizada de Korteweg-de Vries

La n-ésima jerarquía de Korteweg-de Vries

La n-ésima jerarquía de Korteweg-de Vries

Definición

La *jerarquía de Korteweg-de Vries* consiste de todas las ecuaciones de evolución para $n-1$ funciones $u_0, \dots, u_{n-2} \in A = \mathbb{C}[\![x,t]\!]$ que pueden escribirse en la forma:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [L_+^{r/n}, L]$$

donde L es el operador diferencial de orden n dado por

$$L = \partial^n + u_{n-2}\partial^{n-2} + \cdots + u_1\partial + u_0$$

Observación

Observación

La jerarquía de Korteweg-de Vries es equivalente al sistema de ecuaciones de evolución

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = f_i$$

donde los f_i son polinomios diferenciales de los u_j.

Ejemplos

Ejemplos

Para $n = 2$ se tiene

$$L = \partial^2 + u$$

Ejemplos

Para $n = 2$ se tiene

$$L = \partial^2 + u$$

Si hacemos $r = 3$, entonces:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [L_+^{3/2}, L] \quad \Longleftrightarrow \quad 4u_t = 6uu_x + u_{xxx}$$

(ecuación de Korteweg-de Vries)

Ejemplos

Para $n = 2$ se tiene

$$L = \partial^2 + u$$

Si hacemos $r = 3$, entonces:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [L_+^{3/2}, L] \quad \Longleftrightarrow \quad 4u_t = 6uu_x + u_{xxx}$$

(ecuación de Korteweg-de Vries)

Para $n = 3$ se tiene

$$L = \partial^3 + u\partial + v$$

Ejemplos

Para $n = 2$ se tiene

$$L = \partial^2 + u$$

Si hacemos $r = 3$, entonces:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [L_+^{3/2}, L] \quad \Longleftrightarrow \quad 4u_t = 6uu_x + u_{xxx}$$

(ecuación de Korteweg-de Vries)

Para $n = 3$ se tiene

$$L = \partial^3 + u\partial + v$$

Si hacemos $r = 2$, entonces:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [L_+^{2/3}, L] \quad \Longleftrightarrow \quad 3u_{tt} = -4(uu_x)_x - u_{xxx}$$

(ecuación de Boussinesq)

Leyes de conservación

Leyes de conservación

Notación: Si $P = \sum_{i=-\infty}^{m} a_i \partial^i \in A(\!(\partial^{-1})\!)$

$$\operatorname{res} P = a_{-1}$$

Leyes de conservación

Notación: Si $P = \sum_{i=-\infty}^{m} a_i \partial^i \in A(\!(\partial^{-1})\!)$

$$\operatorname{res} P = a_{-1}$$

Teorema

Para cualquier $r \in \mathbb{N}$, $\operatorname{res} L^{r/n}$ *es la densidad de una ley de conservación para la jerarquía de Korteweg-de Vries.*

Notación: Si $P = \sum_{i=-\infty}^{m} a_i \partial^i \in A(\!(\partial^{-1})\!)$

$$\operatorname{res} P = a_{-1}$$

Teorema

Para cualquier $r \in \mathbb{N}$, $\operatorname{res} L^{r/n}$ *es la densidad de una ley de conservación para la jerarquía de Korteweg-de Vries.*

Observación

Leyes de conservación

Notación: Si $P = \sum_{i=-\infty}^{m} a_i \partial^i \in A(\!(\partial^{-1})\!)$

$$\operatorname{res} P = a_{-1}$$

Teorema

Para cualquier $r \in \mathbb{N}$, $\operatorname{res} L^{r/n}$ es la densidad de una ley de conservación para la jerarquía de Korteweg-de Vries.

Observación

Leyes de conservación no triviales corresponden a r's que no son múltiplos enteros de n.

Ejemplos

Ejemplos

Sea $n = 2$ de modo que

$$L = \partial^2 + u$$

Ejemplos

Sea $n = 2$ de modo que

$$L = \partial^2 + u$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\operatorname{res} L^{1/2} &= \frac{1}{2}u \\
\operatorname{res} L^{3/2} &= \frac{1}{8}(3u^2 + u_{xx}) \\
\operatorname{res} L^{5/2} &= \frac{1}{32}(10u^3 - 5u_x^2 + 10(uu_x)_x + u_{xxxx}) \\
\operatorname{res} L^{7/2} &= \frac{1}{128}(35u^4 + 70uu_x^2 + 70u^2u_{xx} + 21u_{xx}^2 \\
&\qquad + 28u_xu_{xx} + 14uu_{xxxx} + u_{xxxxxx}) \\
&\cdots
\end{aligned}$$

La jerarquía de Kadomtsev-Petviashvilii

La ecuación de Kadomtsev-Petviashvilii

La ecuación de Kadomtsev-Petviashvilii

En 1970, la naturaleza sugiere un análago dos dimensional de la ecuación de Korteweg-de Vries, que se conoce hoy en día como la ecuación de Kadomtsev-Petviashvilii:

La ecuación de Kadomtsev-Petviashvilii

En 1970, la naturaleza sugiere un análago dos dimensional de la ecuación de Korteweg-de Vries, que se conoce hoy en día como la ecuación de Kadomtsev-Petviashvilii:

$$\boxed{3u_{yy} = \frac{\partial}{\partial x}(4u_t - 6uu_x - u_{xxx})}$$

donde

$$u = u(x, y, t) \quad \text{función real}$$

La jerarquía de Kadomtsev-Petviashvilii

Definición

La *jerarquía de Kadomtsev-Petviashvilii* consiste de todas las ecuaciones de evolución que pueden escribirse en la forma:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = [Q_+^r, Q]$$

donde Q es el operador pseudo-diferencial de orden 1 dado por

$$Q = \partial + \sum_{i=1}^{\infty} q_i \partial^{-i}$$

Observación

Observación

La jerarquía de Kadomtsev-Petviashvilii es equivalente al sistema de ecuaciones de evolución

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = f_i$$

donde los f_i son polinomios diferenciales de los q_j.

Observación

La jerarquía de Kadomtsev-Petviashvilii es equivalente al sistema de ecuaciones de evolución

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = f_i$$

donde los f_i son polinomios diferenciales de los q_j.

Proposición

La asignación $L \mapsto L^{1/n} = Q$ establece una correspondencia biunívoca entre las soluciones de la jerarquía de Korteweg-de Vries y las soluciones Q de la jerarquía de Kadomtsev-Petviashvilii tales que Q^n es un operador diferencial.

Nota

Nota

Es habitual, y algunas veces esencial, considerar todas las ecuaciones que constituyen la jerarquía de Kadomtsev-Petviashvilii en forma unificada.

Nota

Es habitual, y algunas veces esencial, considerar todas las ecuaciones que constituyen la jerarquía de Kadomtsev-Petviashvilii en forma unificada. Para ello, se introduce un número infinito de coordenadas "temporales" independientes $t_2, t_3, t_4 \dots$ y se trabaja con operadores pseudo-diferenciales con coeficientes en el álgebra de series de potencia formales $A = \mathbb{C}[\![x, t_2, t_3, t_4, \dots]\!]$ en lugar de $A = \mathbb{C}[\![x, t]\!]$.

Nota

Es habitual, y algunas veces esencial, considerar todas las ecuaciones que constituyen la jerarquía de Kadomtsev-Petviashvilii en forma unificada. Para ello, se introduce un número infinito de coordenadas "temporales" independientes $t_2, t_3, t_4 \ldots$ y se trabaja con operadores pseudo-diferenciales con coeficientes en el álgebra de series de potencia formales $A = \mathbb{C}[\![x, t_2, t_3, t_4, \ldots]\!]$ en lugar de $A = \mathbb{C}[\![x, t]\!]$. La jerarquía de Kadomtsev-Petviashvilii se escribe entonces como:

$$\frac{\partial Q}{\partial t_r} = [Q_+^r, Q] \qquad (r \geq 2)$$

Ejemplo

Ejemplo

Si hacemos $r = 2$, entonces:

$$\frac{\partial Q}{\partial t_2} = [Q_+^2, Q] \iff \begin{cases} \dfrac{\partial q_1}{\partial t_2} = \partial^2(q_1) + 2\partial(q_2) \\ \dfrac{\partial q_2}{\partial t_2} = \partial^2(q_2) + 2\partial(q_3) + 2q_1\partial(q_1) \\ \qquad \dots \end{cases}$$

Ejemplo

Si hacemos $r = 2$, entonces:

$$\frac{\partial Q}{\partial t_2} = [Q_+^2, Q] \iff \begin{cases} \dfrac{\partial q_1}{\partial t_2} = \partial^2(q_1) + 2\partial(q_2) \\ \dfrac{\partial q_2}{\partial t_2} = \partial^2(q_2) + 2\partial(q_3) + 2q_1\partial(q_1) \\ \qquad \dots \end{cases}$$

Si hacemos $r = 3$, entonces:

$$\frac{\partial Q}{\partial t_3} = [Q_+^3, Q] \iff \begin{cases} \dfrac{\partial q_1}{\partial t_3} = \partial^3(q_1) + 3\partial^2(q_2) + 3\partial(q_3) + 6q_1\partial(q_1) \\ \qquad \dots \end{cases}$$

Ejemplo

Si hacemos $r = 2$, entonces:

$$\frac{\partial Q}{\partial t_2} = [Q_+^2, Q] \iff \begin{cases} \dfrac{\partial q_1}{\partial t_2} = \partial^2(q_1) + 2\partial(q_2) \\ \dfrac{\partial q_2}{\partial t_2} = \partial^2(q_2) + 2\partial(q_3) + 2q_1\partial(q_1) \\ \qquad \ldots \end{cases}$$

Si hacemos $r = 3$, entonces:

$$\frac{\partial Q}{\partial t_3} = [Q_+^3, Q] \iff \begin{cases} \dfrac{\partial q_1}{\partial t_3} = \partial^3(q_1) + 3\partial^2(q_2) + 3\partial(q_3) + 6q_1\partial(q_1) \\ \qquad \ldots \end{cases}$$

Haciendo $u = -2q_1$, $t_2 = y$, $t_3 = t$ y eliminando q_2 y q_3 se obtiene la ecuación de Kadomtsev-Petviashvilii.

Conexión con la geometría algebraica

El problema de Schottky

El problema de Schottky

Ingredientes:

El problema de Schottky

Ingredientes:

- Espacio de Siegel:

$$\mathscr{H}_g = \{\boldsymbol{\tau} \in \mathrm{Mat}_{g\times g}(\mathbb{C}) \mid \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{t}} = \boldsymbol{\tau},\ \mathrm{Im}\,\boldsymbol{\tau} > 0\}$$

- Variedad abeliana correspondiente a $\boldsymbol{\tau} \in \mathscr{H}_g$:

$$X_{\boldsymbol{\tau}} = \mathbb{C}^g/(\mathbb{Z}^g + \boldsymbol{\tau}\mathbb{Z}^g)$$

- Función teta de Riemann para $X_{\boldsymbol{\tau}}$:

$$\theta(\mathbf{z};\boldsymbol{\tau}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^g} \exp\left(2\pi \mathrm{i}\, \mathbf{n}^{\mathrm{t}}\mathbf{z} + \pi \mathrm{i}\, \mathbf{n}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\tau}\mathbf{n}\right)$$

Problema de Schottky

Caracterizar todas las matrices $\boldsymbol{\tau} \in \mathscr{H}_g$ cuya variedad abeliana asociada $X_{\boldsymbol{\tau}}$ corresponde a la variedad jacobiana de una superficie de Riemann de género g.

Teorema de Shiota

Para $\boldsymbol{\tau} \in \mathscr{H}_g$, las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $X_{\boldsymbol{\tau}}$ es isomorfa a la variedad jacobiana de una superficie de Riemann de género g.

(2) Existen vectores $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W} \in \mathbb{C}^g$, $\mathbf{U} \neq \mathbf{0}$, y una constante u_0, tales que para cualquier $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^g$

$$u(x, y, t) = u_0 + 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \theta(x\mathbf{U} + y\mathbf{V} + t\mathbf{W} + \mathbf{z}; \boldsymbol{\tau})$$

satisface la ecuación de Kadomtsev-Petviashvilii.

La conjetura de Witten

La conjetura de Witten

Ingredientes:

La conjetura de Witten

Ingredientes:

$$\begin{aligned}\overline{\mathscr{M}}_{g,n} &= \text{compactificación del espacio moduli de superficies de} \\ &\ \text{Riemann de género } g \text{ con } n \text{ puntos marcados} \\ \mathscr{L}_i &= \text{haz de líneas sobre } \overline{\mathscr{M}}_{g,n} \text{ cuya fibra en } (\Sigma, x_1, \ldots, x_n) \\ &\ \text{es } T^*_{x_i}\Sigma\end{aligned}$$

Conjetura de Witten

Sea

$$F(t_0, t_1, \dots) = \sum_{g,n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{d_1,\dots,d_n} \left(\int_{\overline{\mathscr{M}}_{g,n}} \bigwedge_{i=1}^{n} c_1(\mathscr{L}_i)^{d_i} \right) t_{d_1} \cdots t_{d_n}$$

Entonces

$$u(t_0, t_1, \dots) = \frac{\partial^2 F}{\partial t_0^2}(t_0, t_1, \dots)$$

satisface la ecuación de Korteweg-de Vries

$$4\frac{\partial u}{\partial t_1} = 6u\frac{\partial u}{\partial t_0} + \frac{\partial^3 u}{\partial t_0^3}$$

Material de referencia

I. M. Krichever.
Methods of algebraic geometry in the theory of non-linear equations.
1977 Russ. Math. Surv. 32 185.

E. Arbarello.
Periods of abelian integrals, theta functions, and differential equations of KdV type.
Proc. Int. Congress of Mathematicians, 1986.

E Looijenga.
Intersection theory on Deligne-Mumford compactifications.
Séminaire Bourbaki 35, 1992-1993.

Gracias!