

# Método wavelet-Galerkin en la solución de EDP

Jairo Villegas G    Jorge Castaño B

Departamento de Ciencias Matemáticas  
Universidad EAFIT

*javille@eafit.edu.co*

Grupo Análisis Funcional y Aplicaciones

13 de junio de 2017

# Tabla de contenido

- 1 Preliminares
- 2 Terminología wavelets
- 3 Método wavelet-Galerkin
- 4 Resultados numéricos

## Problema de Dirichlet

Considere el problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{en } \Omega \quad (1) \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{aligned}$$

$\Omega$  abierto acotado en  $\mathbb{R}^n$ ,  $\partial\Omega$  es la frontera de  $\Omega$  que supondremos Lipschitz y  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  es la solución clásica, con  $f \in L_2(\Omega)$ .

Para encontrar la formulación variacional de (1), se multiplica la ecuación diferencial por una función  $v \in C_0^\infty(\Omega)$  y luego se integra sobre  $\Omega$  para obtener

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

## Método de Galerkin

Problema diferencial:

$$Au = f$$

$A$  operador diferencial en un espacio de Hilbert  $V$ .

$\tilde{u} \approx u$  en  $V_N \subset V$

$$V_N = \text{gen}\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$$

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i.$$

$$V = H^m(\Omega) := \{u \in L_2(\Omega) : u^{(k)} \in L_2(\Omega), 1 \leq k \leq m\}.$$

Formulación variacional:

$$u \in V$$

$$\langle Au, v \rangle = \langle \ell, v \rangle, \quad \forall v \in V$$

$$\langle A\tilde{u}, \varphi_j \rangle = \langle f, \varphi_j \rangle$$

$$\sum_{i=1}^N c_i \langle A\varphi_j, \varphi_i \rangle = \langle f, \varphi_j \rangle$$

$$Kc = b.$$

## Elección del espacio $V_N$

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i$$
$$Kc = b$$

Requerimientos:

- $\varphi_i$  soporte pequeño:  $K$  dispersa
- $\varphi_i$  regularidad y ortogonalidad:  $K$  tiene número de condición bajo
- Esquema refinable:  $\tilde{u}$  se puede mejorar recursivamente con bajo costo computacional.

## Análisis multirresolución

$\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$  sucesión de subespacios de  $L_2(\mathbb{R})$ , es un análisis multirresolución (AMR) si

- $\{0\} \subset \dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset L_2(\mathbb{R})$
- $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L_2(\mathbb{R})$
- $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$
- $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}$
- $f(t) \in V_0 \Leftrightarrow f(t - k) \in V_0$
- $\{\varphi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  es una base ortonormal de  $V_0$ ,  $\varphi$  es la función de escala.

- $\varphi$ : Función escala

$$\varphi(t) := \sqrt{2} \sum_{k=0}^{N-1} h_k \varphi(2t - k)$$

$$V_j = \text{gen}\{\varphi_{jk}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k) : k \in \mathbb{Z}\}$$

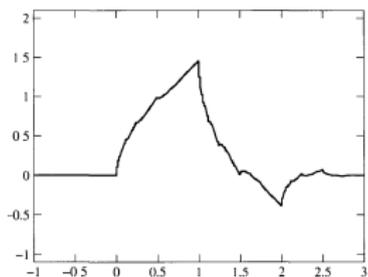
- $\psi$ : Wavelet asociada a la función de escala  $\varphi$

$$\psi(t) := \sqrt{2} \sum_{k=0}^{N-1} g_k \varphi(2t - k)$$

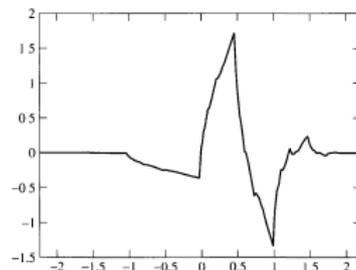
$$g_k = (-1)^k h_{N-1-k}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

$$W_j = \text{gen}\{\psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k) : k \in \mathbb{Z}\}$$

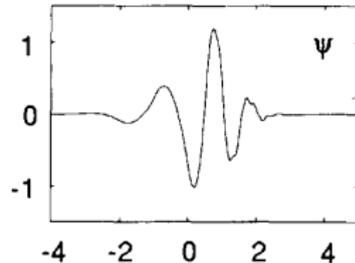
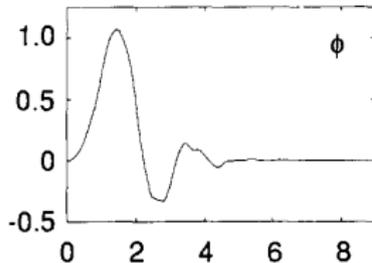
Gráficas tomadas de [Boggess, Narcowich 2001]



Función escala Daubechies  $N = 2$



Wavelet Daubechies  $N = 2$



Daubechies  $N = 5$

## Refinamiento del espacio

- Refinamiento del espacio de representación

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

- Proyecciones ortogonales

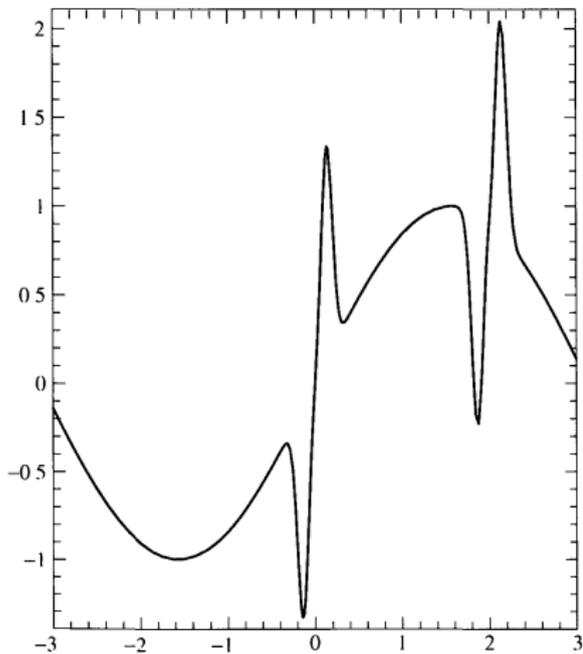
$$P_{V_j} f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \varphi_{j,k}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$P_{W_j} f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(t), \quad x \in \mathbb{R}$$

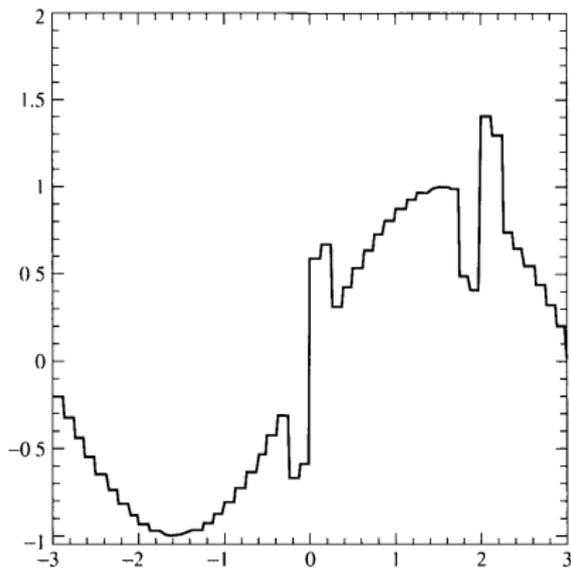
- Descomposición wavelet

$$P_{V_j} f = P_{V_{j_0}} f + \sum_{j=j_0}^{J-1} P_{W_j} f.$$

# Gráficas tomadas de [Boggess, Narcowich 2001]



Señal con ruido



Aproximación por wavelets de Haar

## Expansión wavelet

El espacio  $V_J$  se descompone como

$$V_J = V_{J_0} + W_{J_0} + W_{J_0-1} + \cdots + W_{J-1},$$

de esta relación se obtiene

$$P_J f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{J_0,k} \varphi_{J_0,k}(x) + \sum_{J=J_0}^{J-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{J,k} \psi_{J,k}(x),$$

con  $0 \leq J_0 \leq J$  y

$$c_{J_0,k} = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi_{J_0,k}(x) dx, \quad d_{J,k} = \int_{\mathbb{R}} f(x) \psi_{J_0,k}(x) dx$$

$J = J_0, \dots, J-1$ .

## Decaimiento de los coeficientes wavelets

Si  $m = N/2$  es el número de momentos nulos para una wavelet  $\psi_{j,k}$  y  $f \in C^m(\mathbb{R})$ , entonces los coeficientes wavelet decaen como

$$|d_{j,k}| \leq B_m 2^{-j(m+\frac{1}{2})} \max_{t \in I_{j,k}} |f^{(m)}(t)|,$$

$B_m$  es una constante independiente de  $j, k$  y  $f$ ;  $I_{j,k}$  es el soporte de  $\psi_{j,k}$ . Además,

$$\|f - P_{V_J} f\| = \left\| \sum_{j=J}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(x) \right\|_{L_2(\mathbb{R})} = O(2^{-Jm}).$$

## Qué destacar en las wavelets

El soporte compacto y su elevada localización permiten una buena aproximación aún en regiones donde la solución tiene alto gradiente u otro tipo de singularidad.

Sus propiedades de multirresolución o multiescala permiten calcular una aproximación inicial y adaptivamente mejorarla mediante un refinamiento recursivo realizado sólo en regiones que lo requieran.

Wavelets Daubechies: Elevada localización, buena representación de singularidades, no tienen expresión funcional explícita.

Resultados de alta precisión y bajo costo computacional.

## Método de Galerkin

Considere el PVI

$$L[u(x, t)] = 0, \quad \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad u(x, 0) = u_i(x),$$

donde  $u \in H^m(\Omega)$ . Considere la aproximación

$$u(x, t) \approx \tilde{u}(x, t) = \sum_{j=1}^N a_j(t) f_j(x),$$

donde  $\{f_j\}_{j=1}^N$  genera un subespacio  $N$ -dimensional de  $H^m(\Omega)$ . Se define  $L[\tilde{u}(x, t)]$  como el residual

$$R(a_1, \dots, a_N, x) := L \left[ \sum_{j=1}^N a_j(t) f_j(x) \right].$$

## Método de Galerkin

Se debe minimizar el residual respecto a  $\{g_i\}_{i=1}^N \subset L_2(\Omega)$ , de acuerdo a la fórmula

$$\langle R(a_1, \dots, a_N, x), g_i(x) \rangle_{L_2(\Omega)} = 0, \quad \forall i.$$

Se reduce a

$$\sum_{j=1}^N \langle L[a_j(t)f_j(x)], g_i(x) \rangle_{L_2} = 0, \quad \forall i.$$

El operador se descompone en la parte espacial  $L_s$ , y temporal  $L_t$ :  $L = L_s + L_t$ , de lo cual se obtiene el sistema de EDO

$$BL_t[A] + CA = 0$$

$$A = \{a_i\}, \quad B = \{b_{ij} = \langle f_j, g_i \rangle_{L_2}\}, \quad C = \{c_{ij} = \langle L_s[f_j], g_i \rangle_{L_2}\}.$$

## Ecuación KdV

Ecuación de Korteweg-de Vries (KdV)

$$L[u(x, t)] = \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

De donde

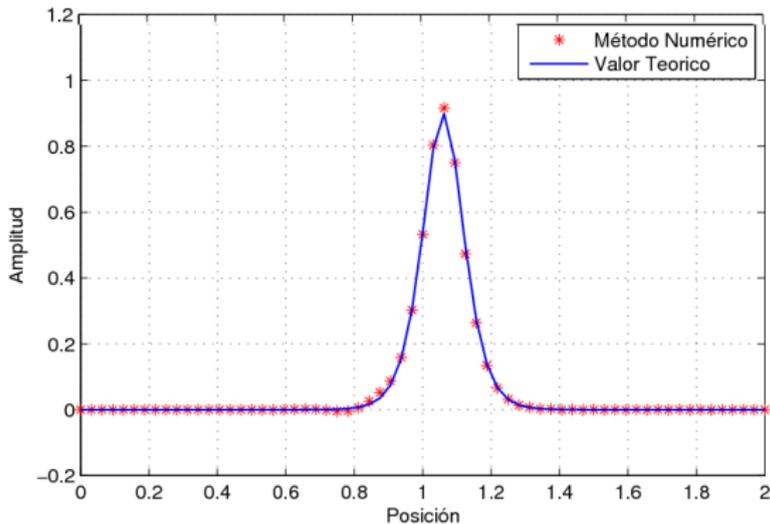
$$\langle R, \varphi_{J,k} \rangle_{L_2} = \sum_m a'_{J,m} \delta_{k,m} + \alpha \sum_m \sum_s a_{J,m} a_{J,s} \Lambda_{m,s,k}^{0,0,1} + \beta \sum_m a_{J,m} \Lambda_{m-k}^{0,3}$$

El sistema EDO queda

$$MA' + (B + C)A = 0$$

$$M = \{\delta_{k,m}\}, \quad B = \sum_s a_{J,s} \Lambda_{m,s,k}^{0,0,1}, \quad C = \{\Lambda_{m-k}^{0,3}\}, \quad A = \{a_i\}.$$

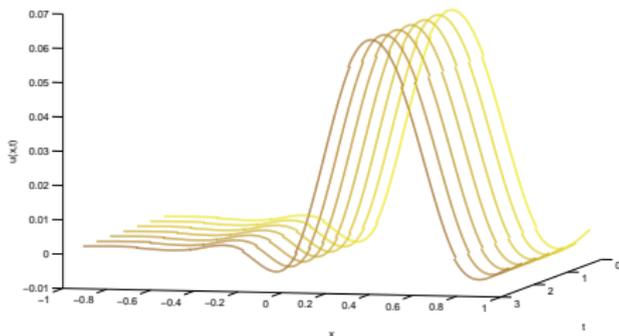
# Solución ecuación KdV



Comparación solución exacta y aproximada

## Resultados numéricos

Solución de la ecuación KdV utilizando como condición inicial la  $u(x, 0) = 3c \operatorname{sech}^2(Ax + D)$ , con  $A = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{\beta}}$  y  $D = -6$ , se obtuvo



$$N = 8, \Delta t = 0,001, \beta = 0,00048 \text{ y } c = \frac{1}{2}$$

## Tabla de errores

t	$L_2$
0	1,04E-06
0.5	5,86E-06
1	1,42E-05
1.5	2,46E-05
2	3,67E-05
2.5	5,01E-05
3	6,48E-05

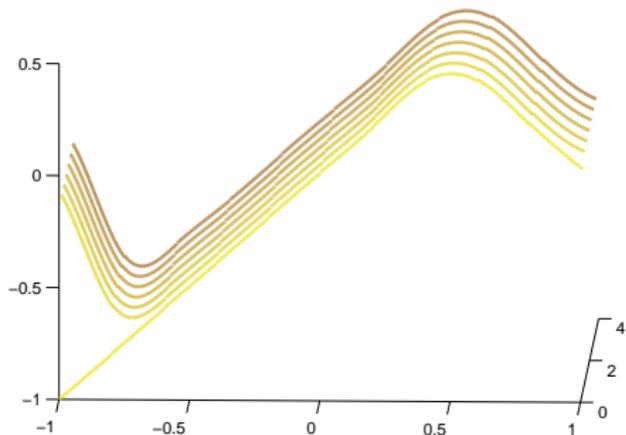
Errores de la solución aproximada de la ecuación KdV para la condición inicial anterior con valores  $N = 8$ ,  $\Delta t = 0,001$

## Resultados numéricos

Se resuelve la ecuación KdV con la condición inicial

$$u(x, 0) = \begin{cases} x & \text{si } -1 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 - x & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

En este caso  $N = 10$ ,  $\alpha = 2$ ,  $\Delta t = 0,001$ ,  $\beta = 0,00048$  y  $c = \frac{1}{2}$

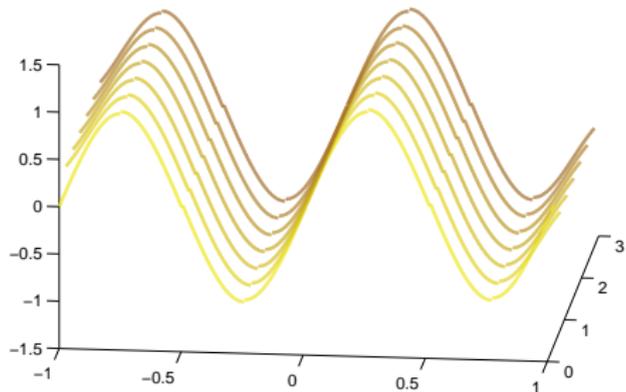


## Resultados numéricos

Se resuelve la ecuación KdV con la condición inicial

$$u(x, 0) = \sin(2\pi x) + \frac{1}{2}\sin(4\pi x)$$

Se utilizaron los valores de  $N = 8$ ,  $\alpha = 2$ ,  $\Delta t = 0,00001$ ,  
 $\beta = 0,00048$  y  $c = 0,5$ .



# Referencias



Beylkin, G., Keiser, J. M.

On the Adaptive Numerical Solution of Nonlinear Partial Differential Equations in Wavelet bases.

*Journal of Computational Physics.*, 132 (1997), 233-259.



Bogges, A., Narcowich, F. J.

A First Course in Wavelets with Fourier Analysis.

Prentice Hall, Inc. New Jersey 2001.



Resnikoff, H. L., Wells, R. O.

Wavelet Analysis.

Springer-Verlag, New York 2002.



Urban, K.

Wavelet Methods for Elliptic Partial Differential Equations.

Oxford University Press Inc., New York 2009.

# Gracias