Método Wavelet-Galerkin

Patricia Gómez Palacio

Grupo de Análisis Funcional y Aplicaciones

UNIVERSIDAD EAFIT

Contenido

- Método de residuos ponderados.
- Elementos finitos 1-dimensionales
- Wavelet Daubechies D6
- Método Wavelet-Galerkin

Método de Residuos Ponderados (MRP)

Sea H un espacio de Hilbert, A un operador diferencial. Sea f una función dada, se quiere determinar una solución aproximada de la ecuación

$$Au = f \text{ en } \mathcal{D}_A \subset H \tag{1}$$

Si $\{\phi_i\}$ es una base de H, y $u_0 \in \mathcal{D}_A$ es tal que

$$\langle Au_0 - f, \phi_k \rangle = 0 \quad \text{para todo} \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

entonces $Au_0 - f = 0$ en H y u_0 es solución de (1).
Se buscan aproximaciones, $\tilde{u} \in \mathcal{D}_A$, de (1) de la forma

$$\tilde{u} = \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k \tag{3}$$

donde las a_k son constantes a determinar y $\{\phi_k\}$ forman una base de H tal que $\mathcal{D}_A$ contiene todas las combinaciones lineales de la forma

$$u = \sum_k \alpha_k \phi_k$$

Método de Galerkin: se basa esencialmente en el modelo de la ecuación 2 esto es, $\tilde{u}$ es solución de (1), es decir $A\tilde{u} - f = 0$, equivale a que

$$\langle A\tilde{u} - f, \phi_k \rangle = 0 \ \text{ para } \ \text{todo } k = 1, 2, ..., n \tag{4}$$

sistema de n ecuaciones con n incógnitas a determinar $a_1, a_2, ..., a_n$. En otras palabras, el método busca que el residuo $R = A\tilde{u} - f$ sea ortogonal a la base escogida en $\mathcal{D}_A$.

Método de Petrov-Galerkin: generaliza el método de Galerkin, usando una base $\{\phi_k\}$ para describir la función aproximación $\tilde{u}$ y otra base distinta $\{\psi_k\}$ del espacio, para plantear las ecuaciones (4). Así,

$$\tilde{u} = \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k$$

y

$$\langle A\tilde{u} - f, \psi_k \rangle = 0 \ \text{ para } \ \text{todo } k = 1, 2, ..., n \tag{5}$$

las ψ_k se denominan funciones de ponderación.

En general, para determinar una solución aproximada de la forma $\tilde{u} = \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k$, de la ecuación $Au = f$ usando el método de Galerkin, tener presente que

$$A(\sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k A(\phi_k) = f$$

con

$$\mathcal{R} = \sum_{k=1}^{n} a_k A(\phi_k) - f \qquad w_k = \frac{d\tilde{u}}{da_k} = \phi_k, \; k = 1, 2, ..., n$$

se debe satisfacer que

$$\int_\Omega w_k \mathcal{R} dx = \int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{n} a_j A(\phi_j) - f \right) \phi_k dx = 0 \;\; k = 1, 2, ..., n$$

y los a_j se obtienen al resolver el sistema de ecuaciones

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \int_\Omega A(\phi_j)\phi_k dx = \int_\Omega f\phi_k dx \;\; k = 1, 2, ..., n$$

o mejor

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{K}_{jk} = \mathbf{F}_k \;\; k = 1, 2, ..., n$$

donde $\mathbf{K}_{jk} = \int_\Omega A(\phi_j)\phi_k dx$ y $\mathbf{F}_k = \int_\Omega f\phi_k dx$ para $k = 1, 2, ..., n$

Ejemplo. Considerar la ecuación dada por

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u = -x \quad 0 < x < 1 \tag{6}$$

$$u(0) = 0 \ \text{ y } \ u(1) = 0$$

$\tilde{u}$ es solución del problema si $\tilde{u} \in L_2(0,1)$ y $\tilde{u}(0) = 0$ y $\tilde{u}(1) = 0$. En particular, considerar

$$\tilde{u} = a_1 x(1-x)$$

con $w_1 = x(1-x)$ y

$$\mathcal{R} = \frac{d^2\tilde{u}}{dx^2} - \tilde{u} + x = -2a_1 - a_1 x(1-x) + x$$

y usando Galerkin, se debe resolver $\langle \mathcal{R}, w_1 \rangle = 0$, es decir

$$\int_0^1 [x(x-1)]\,\mathcal{R}dx = \int_0^1 [x(x-1)]\left[\frac{d^2\tilde{u}}{dx^2} - \tilde{u} + x\right]dx \tag{7}$$

$$= \int_0^1 [x(x-1)]\,[-2a_1 - a_1 x(1-x) + x]dx = 0 \tag{8}$$

$$\int_0^1 [x(1-x)][-2a_1 - a_1 x(1-x) + x]dx = 0$$
$$\int_0^1 [-2a_1 x + 2a_1 x^2 - a_1 x^2 + 2a_1 x^3 - a_1 x^4 + x^2 - x^3]dx = 0$$

y al resolver la integral se llega a la ecuación

$$-a_1 + \frac{2}{3}a_1 - \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{5}a_1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 0$$

de donde $a_1 = \frac{5}{22} = 0{,}2272$ y

$$\tilde{u} = 0{,}2272x(1-x)$$

Si $\tilde{u} = a_1 x(1-x) + a_2 x^2(1-x)$, entonces con $w_1 = x(1-x)$ y $w_2 = x^2(1-x)$, y

$$\begin{aligned} R &= \frac{d^2\tilde{u}}{dx^2} - \tilde{u} + x \\ &= -2a_1 + 2a_2 - 6a_2 x - a_1 x + a_1 x^2 - a_2 x^2 + a_2 x^3 + x \\ &= a_1(-2 - x - x^2) + a_2(2 - 6x - x^2 + x^3) + x \end{aligned}$$

y se debe resolver el sistema de ecuaciones, para a_1 y a_2:

$$\int_0^1 [x(1-x)][a_1(-2 - x + x^2) + a_2(2 - 6x - x^2 + x^3) + x]dx = 0$$

$$\int_0^1 [x^2(1-x)][a_1(-2 - x + x^2) + a_2(2 - 6x - x^2 + x^3) + x]dx = 0$$

de donde $a_1 = 0{,}1459$, $a_2 = 0{,}1628$ y

$$\tilde{u} = 0{,}1459x(1-x) + 0{,}1628x^2(1-x)$$

En la formulación del método de Galerkin para el problema 6, fue necesario evaluar la integral

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 w(\frac{d^2\tilde{u}}{dx^2} - \tilde{u} + x)dx \\
&= \int_0^1 w\frac{d^2\tilde{u}}{dx^2}dx + \int_0^1 (-w\tilde{u} + wx)dx
\end{aligned}
$$

al aplicar integración por partes en la primera integral se obtiene la formulación débil del problema, es decir

$$
w\frac{d\tilde{u}}{dx}\bigg|_0^1 + \int_0^1 (-\frac{dw}{dx}\frac{d\tilde{u}}{dx} - w\tilde{u} + wx)dx = 0
$$

Elementos finitos unidimensionales lineales

Se busca una aproximación de la forma

$$u = c_1 x + c_2 \tag{9}$$

con la condición que

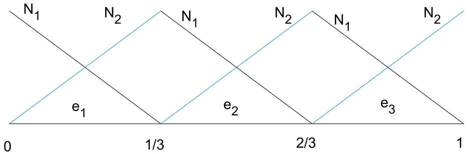
$$u = c_1 x_k + c_2 = u_k \quad \text{para } \; k = i, i+1 \tag{10}$$

Resolviendo (10) para c_1 y c_2, se puede escribir (9) en términos de u_i y u_{i+1} así

$$u(x) = N_1(x) u_i + N_2(x) u_{i+1} \tag{11}$$

con

$$N_1 = \frac{x_{i+1} - x}{h_i} \qquad N_2 = \frac{x - x_i}{h_i} \qquad h_i = x_{i+1} - x_i$$



Para el problema (6) y los elementos

$$e_1 = [0, 1/3], \quad e_2 = [1/3, 2/3] \quad \text{y} \quad e_3 = [2/3, 1]$$

$$u = N_1(x)u_i + N_2(x)u_{i+1} \qquad \frac{du}{dx} = N_1'(x)u_i + N_2'(x)u_{i+1}$$

$$w_1 = N_1(x) \quad w_2 = N_2(x) \;\text{ y }\; \frac{dw_1}{dx} = N_1'(x) \quad \frac{dw_2}{dx} = N_2'(x)$$

La formulación débil, en el elemento $e_i = [x_i, x_{i+1}]$ en términos de u_i y u_{i+1}, w_1 y w_2

$$I_1 = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (-N_1'(N_1'u_i + N_2'u_{i+1}) - N_1(N_1u_i + N_2u_{i+1}) + xN_1)dx$$

$$I_2 = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (-N_2'(N_1'u_i + N_2'u_{i+1}) - N_2(N_1u_i + N_2u_{i+1}) + xN_2)dx$$

Escrita en forma matricial

$$-\int_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{pmatrix} N_1' \\ N_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1' & N_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{pmatrix} dx$$

$$-\int_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{pmatrix} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} x \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} dx$$

calculando las integrales, con los valores de N_1 y N_2, se obtiene

$$-\begin{pmatrix} \frac{1}{h_i} + \frac{h_i}{3} & -\frac{1}{h_i} + \frac{h_i}{6} \\ -\frac{1}{h_i} + \frac{h_i}{6} & \frac{1}{h_i} + \frac{h_i}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{h_i}{6}(x_{i+1} + 2x_i) \\ \frac{h_i}{6}(2x_{i+1} + x_i) \end{pmatrix}$$

Evaluando en cada elemento

(e_1)

$$\begin{pmatrix} -3{,}111 & 2{,}9444 \\ 2{,}9444 & -3{,}111 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}0185 \\ 0{,}0370 \end{pmatrix}$$

(e_2)

$$\begin{pmatrix} -3{,}111 & 2{,}9444 \\ 2{,}9444 & -3{,}111 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}0741 \\ 0{,}0926 \end{pmatrix}$$

(e_3)

$$\begin{pmatrix} -3{,}111 & 2{,}9444 \\ 2{,}9444 & -3{,}111 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}1296 \\ 0{,}1481 \end{pmatrix}$$

Acoplando el sistema

$$\begin{pmatrix} -3{,}11 & 2{,}94 & 0 & 0 \\ 2{,}94 & -6{,}22 & 2{,}94 & 0 \\ 0 & 2{,}94 & -6{,}22 & 2{,}94 \\ 0 & 0 & 2{,}94 & -3{,}11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}0185 + u'(0) \\ -0{,}1111 \\ -0{,}2222 \\ -0{,}1481 - u'(1) \end{pmatrix}$$

al introducir las condiciones de frontera $u_1 = 0$ y $u_4 = 0$ se tiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2{,}94 & -6{,}22 & 2{,}94 & 0 \\ 0 & 2{,}94 & -6{,}22 & 2{,}94 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}1111 \\ -0{,}2222 \\ 0 \end{pmatrix}$$

resolviendo se tiene $u_1 = 0$, $u_2 = 0{,}0448$, $u_3 = 0{,}0569$ y $u_4 = 0$

La solución en cada elemento, con $u = N_1(x)u_i + N_2(x)u_{i+1}$, es, $0 \leq x \leq 1/3$

$$u = \frac{1/3 - x}{1/3} 0 + \frac{x - 0}{1/3} 0{,}0448 = 0{,}1344x$$

$1/3 \leq x \leq 2/3$

$$u = \frac{2/3 - x}{1/3} 0{,}0448 + \frac{x - 1/3}{1/3} 0{,}0569 = 0{,}0327 + 0{,}3051x$$

$2/3 \leq x \leq 1$

$$u = \frac{1 - x}{1/3} 0{,}0569 + \frac{x - 2/3}{1/3} 0 = 0{,}1707(1 - x)$$

Elementos finitos unidimensionales cuadráticos.

En un elemento $e = [x_i, x_{i+1}]$, con $x_j = \frac{x_{i+1}+x_i}{2}$, se busca una aproximación de la forma

$$u(x) = c_3 x^2 + c_2 x + c_1 \tag{12}$$

tal que $u_k = c_3 x_k^2 + c_2 x_k + c_1$ para $k = i, j, i+1$
y al resolver para c_1, c_2 y c_3, usando la ecuación (12) se expresa u en términos de u_i, u_{i+1} y u_j en la forma

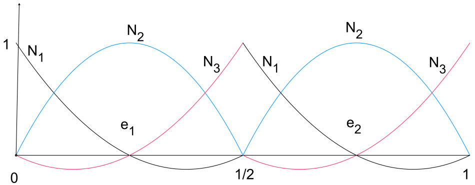
$$u(x) = N_1(x)u_i + N_2(x)u_j + N_3 u_{i+1}$$

donde

$$N_1 = \frac{2}{h_i^2}(x - x_{i+1})(x - x_j)$$

$$N_2 = -\frac{4}{h_i^2}(x - x_i)(x - x_{i+1})$$

$$N_3 = \frac{2}{h_i^2}(x - x_i)(x - x_j)$$



Para el problema (6), en los elementos $e_1 = [0, 1/2]$ y $e_2 = [1/2, 1]$ y en cada elemento la aproximación cuadrática

$$u = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2 + N_3(x)u_3$$

De la formulación débil del problema, en cada elemento se debe resolver para $k = 1, 2, 3$ la integral

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (-N_k'(N_1'u_1 + N_2'u_2 + N_3'u_3) - N_k(N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_3) + xN_k)dx$$

que en forma matricial es

$$-\int_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{pmatrix} N_1' \\ N_2' \\ N_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1' & N_2' & N_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} dx$$

$$-\int_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} x \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} dx$$

y calculando las integrales con los valores de N_1, N_2 y N_3, se obtiene

$$-\begin{pmatrix} \frac{7}{3h_i}+\frac{2h_i}{15} & -\frac{8}{3h_i}+\frac{h_i}{15} & \frac{1}{3h_i}-\frac{h_i}{30} \\ -\frac{8}{3h_i}+\frac{h_i}{15} & \frac{16}{3h_i}+\frac{8h_i}{15} & -\frac{8}{3h_i}+\frac{h_i}{15} \\ \frac{1}{3h_i}-\frac{h_i}{30} & -\frac{8}{3h_i}+\frac{h_i}{15} & \frac{7}{3h_i}+\frac{2h_i}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$$+\frac{h_i}{6}\begin{pmatrix} x_i \\ 2(x_{i+1}+x_i) \\ x_{i+1} \end{pmatrix}$$

El sistema acoplado resultante, después de evaluar en los valores de cada elemento e introducir las condiciones de frontera $u_1 = 0$ y $u_5 = 0$, es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5{,}3 & -10{,}93 & 5{,}3 & 0 & 0 \\ -0{,}65 & 5{,}3 & -9{,}47 & 5{,}3 & -0{,}65 \\ 0 & 0 & 5{,}3 & -10{,}93 & 5{,}3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}083 \\ -0{,}083 \\ -0{,}25 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de donde $u_2 = 0{,}0351$, $u_3 = 0{,}0566$, $u_4 = 0{,}0503$

En (e_1) $\quad 0 \leq x \leq 1/2 \quad u = 0{,}1672x - 0{,}1080x^2$

En (e_2) $\quad 1/2 \leq x \leq 1 \quad u = -0{,}3520x^2 + 0{,}4149x - 0{,}06286$

Wavelet Daubechies D6

Las siguientes fórmulas permiten calcular el valor de la función de escala φ y de la wavelet madre ψ en cada valor de x

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{5} \sqrt{2} h_k \varphi(2x-k) \quad \psi(x) = \sum_{k=-4}^{1} (-1)^k \sqrt{2} h_{1-k} \varphi(2x-k)$$

El cálculo es recursivo y se puede iniciar con el valor para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, que son las componentes de un vector propio asociado al valor propio 1 de la siguiente matriz A

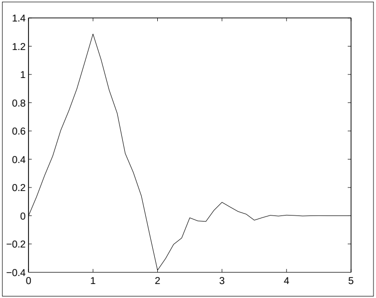
$$A = \sqrt{2} \begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & 0 & 0 & 0 \\ h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & 0 \\ 0 & h_5 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & h_5 & h_4 & h_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_5 \end{bmatrix}$$

k	h_k
0	0,3326705529500825...
1	0,8068915093110924...
2	0,4598775021184914...
3	-0,1350110200102546...
4	-0,0854412738820267...
5	0,0352262918857095...

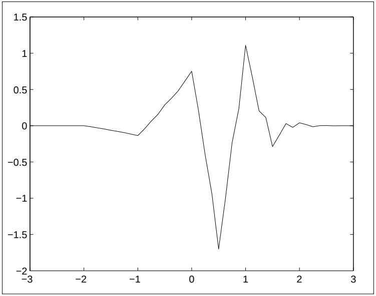
$\varphi(x)$ para algunos valores de x

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
0	0	2,5	−0,014970591
0,125	0,133949835	2,625	−0,03693836
0,250	0,284716624	2,750	−0,040567571
0,375	0,422532739	2,875	0,037620632
0,500	0,605178468	3	0,095267546
0,625	0,743571274	3,125	0,062104053
0,750	0,89811305	3,250	0,02994406
0,875	1,090444005	3,375	0,011276602
1	1,286335069	3,5	−0,031541303
1,125	1,105172581	3,625	−0,013425276
1,250	0,889916048	3,750	0,003025131
1,375	0,724108826	3,875	−0,002388515
1,5	0,441122481	4	0,004234346
1,625	0,30687191	4,125	0,001684683
1,750	0,139418882	4,250	−0,001596798
1,875	−0,125676646	4,375	0,000149435
2	−0,385836961	4,5	0,000210945
2,125	−0,302911152	4,625	$-7{,}95485e-05$
2,250	−0,202979935	4,750	$1{,}05087e-05$
2,375	−0,158067602	4,875	$5{,}23519e-07$
		5	0

Con los datos de φ en la tabla se pueden construir en Matlab las gráficas de la función de escala φ, en (a), y la wavelet madre ψ, en (b).



(a)



(b)

Método Wavelet-Galerkin

Considerar el problema

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \beta u = 0 \quad 0 < x < 1 \tag{13}$$
$$u(0) = 1 \text{ y } u(1) = 0$$

Para la wavelet D6, con $L = 6$ y $j = 0$, considerar una solución aproximada de (13) de la forma

$$u(x) = \sum_{k=1-L}^{2^j} c_k 2^{j/2} \varphi(2^j x - k) = \sum_{k=-5}^{1} c_k \varphi(x - k) \tag{14}$$

donde c_k son constantes a determinar.
Al sustituir (14) en (13) se tiene que

$$\begin{gathered} \frac{d^2}{dx^2} \sum_{k=-5}^{1} c_k \varphi(x-k) + \beta \sum_{k=-5}^{1} c_k \varphi(x-k) = 0 \\ \sum_{k=-5}^{1} c_k \varphi''(x-k) + \beta \sum_{k=-5}^{1} c_k \varphi(x-k) = 0 \end{gathered} \tag{15}$$

Al tomar producto interno con $\varphi(x-n)$, se sigue que

$$\sum_{k=-5}^{1} c_k \Omega[n-k] + \beta \sum_{k=-5}^{1} c_k \delta_{n,k} = 0 \tag{16}$$

con $n = -5, -4, ..., 0, 1,$ y

$$\Omega[n-k] = \int \varphi''(x-k)\varphi(x-n)dx$$

$$\delta_{n,k} = \int \varphi(x-k)\varphi(x-n)dx$$

Las integrales $\Omega[n-k]$ se conocen como coeficientes conexión. Al introducir las condiciones de frontera, $u(0) = 1$ y $u(1) = 0$, se tienen las siguientes igualdades

$$u(0) = \sum_{k=-5}^{1} c_k \varphi(-k) = 1 \quad \text{y} \quad u(1) = \sum_{k=-5}^{1} c_k \varphi(1-k) = 0$$

Coeficientes conexión para D6 con j=0

$\Omega[-4]$	$5{,}357142857144194e-03$
$\Omega[-3]$	$1{,}142857142857108e-01$
$\Omega[-2]$	$-8{,}761904761904359e-01$
$\Omega[-1]$	$3{,}390476190476079e+00$
$\Omega[0]$	$-5{,}267857142857051e+00$
$\Omega[1]$	$3{,}390476190476190e+00$
$\Omega[2]$	$-8{,}761904761904867e-01$
$\Omega[3]$	$1{,}142857142857139e-01$
$\Omega[4]$	$5{,}357142857141956e-03$

La ecuación (16) se puede escribir en forma de sistema matricial, $TC = B$, donde C el vector de las incógnitas c_k, T la matriz de los coeficientes conexión, y B el vector de términos independientes, es decir

$$T = \begin{bmatrix} 0 & \varphi(4) & \varphi(3) & \varphi(2) & \varphi(1) & 0 & 0 \\ \Omega[1] & \Omega[0]+\beta & \Omega[-1] & \Omega[-2] & \Omega[-3] & \Omega[-4] & \Omega[-5] \\ \Omega[2] & \Omega[1] & \Omega[0]+\beta & \Omega[-1] & \Omega[-2] & \Omega[-3] & \Omega[-4] \\ \Omega[3] & \Omega[2] & \Omega[1] & \Omega[0]+\beta & \Omega[-1] & \Omega[-2] & \Omega[-3] \\ \Omega[4] & \Omega[3] & \Omega[2] & \Omega[1] & \Omega[0]+\beta & \Omega[-1] & \Omega[-2] \\ \Omega[5] & \Omega[4] & \Omega[3] & \Omega[2] & \Omega[1] & \Omega[0]+\beta & \Omega[-1] \\ 0 & 0 & \varphi(4) & \varphi(3) & \varphi(2) & \varphi(1) & 0 \end{bmatrix}$$

donde se ha tenido en cuenta que el soporte de $\varphi(x)$ es $[0,5]$ y por tanto $\varphi(6) = \varphi(5) = \varphi(0) = \varphi(-1) = 0$. Con $\beta = 1$ la matriz T es

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}0042 & 0{,}0953 & -0{,}3858 & 1{,}2863 & 0 & 0 \\ 3{,}3905 & -4{,}2679 & 3{,}3905 & -0{,}8762 & 0{,}1143 & 0{,}0054 & 0 \\ -0{,}8762 & 3{,}3905 & -4{,}2679 & 3{,}3905 & -0{,}8762 & 0{,}1143 & 0{,}0054 \\ 0{,}1143 & -0{,}8762 & 3{,}3905 & -4{,}2679 & 3{,}3905 & -0{,}8762 & 0{,}1143 \\ 0{,}0054 & 0{,}1143 & -0{,}8762 & 3{,}3905 & -4{,}2679 & 3{,}3905 & -0{,}8762 \\ 0 & 0{,}0054 & 0{,}1143 & -0{,}8762 & 3{,}3905 & -4{,}2679 & 3{,}3905 \\ 0 & 0 & 0{,}0042 & 0{,}0953 & -0{,}3858 & 1{,}2863 & 0 \end{bmatrix}$$

y con

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad y \quad C = \begin{bmatrix} c_{-5} \\ c_{-4} \\ c_{-3} \\ c_{-2} \\ c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \end{bmatrix}$$

la solución del sistema que se obtiene usando Matlab es

$$C = \begin{bmatrix} c_{-5} \\ c_{-4} \\ c_{-3} \\ c_{-2} \\ c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}9972 \\ -0{,}8776 \\ 0{,}1279 \\ 1{,}0543 \\ 1{,}0870 \\ 0{,}2476 \\ -0{,}5059 \end{bmatrix}$$

y entonces

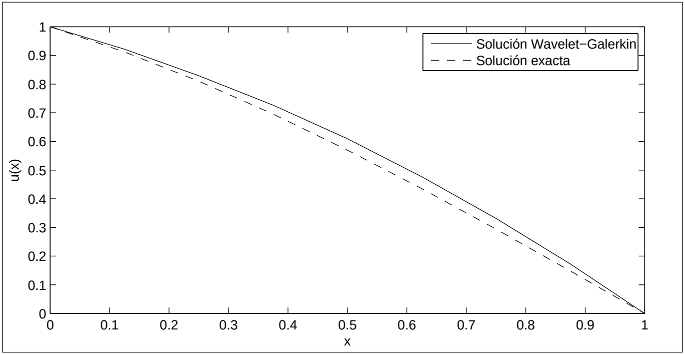
$$\begin{aligned} u(x) = \sum_{k=-5}^{1} c_k \varphi(x-k) &= -0{,}9972\varphi(x+5) - 0{,}8776\varphi(x+4) \\ &+ 0{,}1279\varphi(x+3) + 1{,}0543\varphi(x+2) + 1{,}0870\varphi(x+1) \\ &+ 0{,}2476\varphi(x) - 0{,}5059\varphi(x-1) \end{aligned}$$

A partir de la ecuación obtenida para u y con los valores de φ dados en la tabla anterior, se consigue la solución aproximada que se muestra en la siguiente tabla, donde también se incluyen los valores de la solución exacta, en los mismos valores de x, teniendo en cuenta que la solución exacta del problema es

$$u(x) = \cos(x) - \cot(1)\sin(x)$$

x	$u(x)$ aproximado	$u(x)$ exacto
0	1	1
0,125	0,921657	0.912145
0,25	0,829106	0.810056
0,375	0,726413	0.69533
0,5	0,609339	0.569747
0,625	0,477075	0.435276
0,75	0,331501	0.294014
0,875	0,172689	0.148163
1	0	0

Solución exacta y aproximada de $u'' + u = 0$ $u(0) = 1$, $u(1) = 0$



Bibliografía

[1] Daubechies, I. *Ten lectures on wavelets.* Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.

[2] Latto, A., Resnikoff, H. L. and Tenenbaum. *The evaluation of connection coefficients of compactly supported wavelets.* Proccedings of the French-USA Workshop on wavelets and turbulence, Princeton, New York, 1991. Springer-Verlag, 1992.

[3] Mishra, V. and Sabina. *Wavelet Galerkin solution of ordinary differential equations.* International journal of mathematical analysis. 5(9), pp. 407-424, 2011.

[4] Patel, D., Abeyratna, M.K. and Shyamali Dilhani, M.H.M.R.*Wavelet Galerkin solution for boundary value problems.* International Journal of Engineering Research and Development. 10(5), pp. 21-30, 2014.

[5] Popovici, C.I. *Matlab evaluation of the* $\Omega_{j,k}^{m,n}(x)$ *coefficients for PDE solving by Wavelet Galerkin approximation.* An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa. 18(1), pp.287 - 294, 2010.

[6] Rillo P., Noelia. *Introducción a la teoría de wavelets.* Universidad de Barcelona. 2005.

[7] Yakovlev, A.S. *Wavelets as a Galerkin basis,* http://wwwmayr.informatik.tu-muenchen.de/konferenzen/Jass04/courses /2/Papers/galerkin11.pdf [Consultado: agosto 1 de 2014]

[8] Zhou, Xiaolin. *Wavelets-Galerkin Scheme for a Stokes Problem.* Numerical Methods for partial differential equations. 20(2), pp. 193-198, 2004.